PROF. DR. A. WAKOLBINGER Übungsblatt 9 Wintersemester 2020/21

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 29. Januar 2021, 10 Uhr

Leitfaden zur Abgabe der Übungsaufgaben: siehe “Ankündigungen” im Moodle Kurs

33. ***Zufälliger rekursiver Baum nochmal.*** In der Aufgabe N1 auf Blatt 8 haben wir einen Algorithmus zur Erzeugung eines rein zufälligen, wohlbeschrifteten verwurzelten Baumes (wir sagen dazu kurz: eines *rein zufälligen rekursiven Baumes*) mit $n+1$ Knoten kennengelernt. (Dabei ist einer der $n+1$ Knoten die Wurzel.)

a) Wie wahrscheinlich ist das Ereignis, dass in einem rein zufälligen rekursiven Baum mit 21 Knoten genau zwei Knoten vom Knoten 1, vier Knoten vom Knoten 2 und sieben Knoten vom Knoten 3 abstammen[1], gegeben die Knoten 1, 2 und 3 sind Kinder der Wurzel? *Hinweis: Stellen Sie eine Beziehung zur Pólya-Urne mit 4 Farben her. Die am Ende von V8b2 gewonnene Erkenntnis ist hilfreich.*

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass in einer rein zufälligen Permutation von 1,2,. . . , 20 der die 1 enthaltende Zyklus die Länge 3, der die 2 enthaltende Zyklus die Länge 5 und der die 3 enthaltende Zyklus die Länge 8 hat, gegeben die Elemente 1, 2 und 3 liegen in verschiedenen Zyklen?

34.S. ***Warten auf ein Muster.*** $B_1, B_2, \ldots$ sei eine Folge von unabhägigen, uniform auf $\{A, C, G, T\}$ verteilten Zufallsvariablen.[2]

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Muster $ATAT$ vor dem Muster $ATGC$ erscheint. (Hinweis: Gehen Sie dabei ähnlich vor wie im Beispiel B der Vorlesung 9a3, indem Sie einen reduzierten Graphen aufstellen. Dabei kommen Sie mit einem Graphen aus, der 7 Knoten hat, darunter $*$, A und die beiden terminalen Knoten $ATAT$ und $ATGC$. Betrachten Sie dann eine Markovkette $(X_0, X_1, \ldots)$, die in $*$ startet und ihren ersten Schritt entweder nach A oder wieder nach $*$ macht.)

b) Es sei T die kleinste natürliche Zahl, für die $B_{T-3}B_{T-2}B_{T-1}B_T = ATAT$. Berechnen Sie $\mathbf{E}[T]$. (Hinweis: Gehen Sie ähnlich vor wie in Teil a). Hier kommen sie schon mit einem Teil des dort gefundenen reduzierten Graphen aus.)

35. ***Wie hoch kommt eine Irrfahrt mit negativer Drift?*** Wir betrachten die $(1/3, 2/3)$-Irrfahrt X auf $\mathbb{Z}$, vgl. Beispiel 2 in Vorlesung 8b3.

(i) Berechnen Sie für $-20 \le a \le 10$ die Wahrscheinlichkeit, bei Start in a den Zustand 10 vor dem Zustand -20 zu erreichen. *Hinweis: Probieren Sie den Ansatz $w(a) := c2^a + d$, mit passend zu wählenden $c, d \in \mathbb{R}$.*

(ii) Sei $\ell \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei Start in 0 den Zustand 10 vor dem Zustand $-\ell$ zu erreichen.

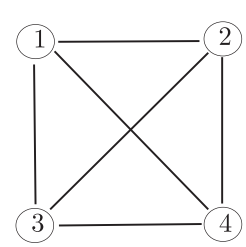
(iii) Finden Sie den Grenzwert der in (ii) gefundenen Wahrscheinlichkeit für $\ell \to \infty$.

Zum Weiterdenken:

(iv) Mit welcher Wahrscheinlichkeit driftet X nach $-\infty$ ab, bevor es jemals den Zustand 10 erreicht?

(v) Wie ist das Maximum aller Zustände verteilt, die X jemals erreicht?

36.S. ***Irrfahrt auf einem ungerichteten Graphen.***
Wir betrachten den skizzierten vollständigen Graphen mit 4 Knoten. Für $a \neq b$ habe die Kante zwischen a und b das Gewicht $c_{ab} = c_{ba} \ge 0$. Es bezeichne $g(a) := \sum_{b \in \{1,2,3,4\} \setminus \{a\}} c_{ab}$ das Gesamtgewicht der von a ausgehenden Kanten. Wir nehmen an, dass $g(a) > 0$ für alle $a \in \{1, 2, 3, 4\}$. Vom Knoten a erfolgt der nächste Schritt zum Knoten b mit Wahrscheinlichkeit $P(a, b) := \frac{c_{ab}}{g(a)}$. Berechnen Sie die reversible Gleichgewichtsverteilung.



[1] Wir sagen, dass v_2 von v_1 abstammt, wenn $v_2 \neq v_1$ und v_1 auf dem Weg von v_2 zur Wurzel liegt (oder v_1 die Wurzel ist).

[2] also in der Sprache aus den ersten Wochen der Vorlesung eine “wiederholte rein zufällige Wahl aus der Menge $\{A, C, G, T\}$”.